В. А. ГУСЕВ,
Ю. М. КОЛЯГИН,
Г. Л. ЛУКАНКИН

Векторы в школьном курсе геометрии

В. А. ГУСЕВ,
Ю. М. КОЛЯГИН,
Г. Л. ЛУКАНКИН

Векторы в школьном курсе геометрии

Пособие для учителей

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1976

513
Г96

Гусев В. А. и др.

Г96 Векторы в школьном курсе геометрии. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1976

48 с. с илл.

Перед загл. авт.: В. А. Гусев, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин

$$\text{Г}\ \frac{60501-388}{103(03)-76}\ 130-76$$ 513

ВВЕДЕНИЕ

Одними из фундаментальных понятий современной математики являются вектор и его обобщение — тензор. Эволюция понятия вектора осуществлялась благодаря широкому использованию этого понятия в различных областях математики, механики, а также в технике. Работы К. Весселя, Ж. Аргана и К. Ф. Гаусса по теории комплексных чисел установили связь между арифметическими операциями над комплексными числами и геометрическими операциями над векторами в двумерном пространстве — в плоскости.

В середине прошлого столетия в работах В. Гамильтона, Ф. Мёбиуса понятие вектора нашло широкое применение при изучении свойств трехмерного и многомерного пространств.

Конец прошлого и начало текущего столетия ознаменовались широким развитием векторного исчисления и его приложений. Были созданы векторная алгебра и векторный анализ, теория поля, тензорный анализ, общая теория многомерного векторного пространства. Эти теории были использованы при построении специальной и общей теории относительности, которые играют исключительно важную роль в современной физике.

В математике в настоящее время на векторной основе излагаются линейная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрии. До введения в школе новых программ по математике с понятием вектора учащиеся впервые встречались в курсе физики (скорость, сила, ускорение, напряженность магнитного поля и т. п.). Лишь при изучении тригонометрических функций в традиционном курсе школьной математики использовалось понятие вектора. Поэтому у учащихся обычно складывалось неправильное представление о том, что вектор — понятие физическое. Между тем вектор — чисто математическое понятие, которое лишь применяется в физике или других прикладных науках и которое позволяет упростить решение некоторых сложных задач этих наук.

Одним из ведущих понятий современной математики является понятие в е к т о р н о г о п р о с т р а н с т в а. Оно имеет широкие приложения в математике, в таких ее разделах, как «Линейная алгебра», «Линейное программирование», «Функциональный анализ» и т. д., а также во многих разделах физики. В рамках теории трехмерного векторного пространства может быть построен курс стереометрии, отличающийся от традиционного курса евклидовой геометрии большим изяществом и компактностью (хотя и менее наглядный и менее доступный для первоначального изучения). Если считать известным определение коммутативной группы, то векторное пространство можно определить следующим образом*.

Множество V называется действительным векторным пространством, если:

1. V является коммутативной группой относительно операции, называемой «сложением».

2. Определена операция, называемая «умножением» элементов множества V на действительное число, так что если a — произвольный элемент V, а α — произвольное действительное число, то $\alpha \cdot a \in V$ и, кроме того, выполняются следующие свойства для произвольных действительных чисел α, β и произвольных элементов a, b из V:

1) $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$ — смешанная ассоциативность;

2) $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ — дистрибутивность относительно сложения чисел;

3) $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ — дистрибутивность относительно сложения элементов из V;

4) $1 \cdot a = a$.

Элементы векторного пространства называются векторами.

Так как элементы множества V могут быть элементами самой разнообразной природы, то примеры векторных пространств весьма многочисленны. В частности, векторными пространствами (с обычными операциями сложения «векторов» и умножения «вектора» на действительное число) являются:

а) множество многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами;

б) множество всех векторов плоскости, для которых начало изображающих их направленных отрезков находится в начале координат;

в) множество аффинных отображений плоскости на себя;

г) множество действительных чисел и т. д.

Упорядоченный набор n действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется n-мерным вектором (числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются координатами вектора, а число n — его размерностью). Определим сложение двух векторов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ следующим образом: $A + B = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n\}$, а умножение на число α так: $\alpha \cdot A = \{\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \ldots, \alpha \cdot a_n\}$, тогда множество n-мерных векторов образует n-мерное векторное пространство.

---

* Более подробные сведения о векторном пространстве читатель может найти в книге: Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л. Основные понятия современного школьного курса математики (под ред. А. И. Маркушевича). М., «Просвещение», 1974, с. 132.

Читатель без труда обнаружит, что множество всех параллельных переносов плоскости образует двумерное векторное пространство, а векторы пространства можно рассматривать как элементы трехмерного векторного пространства.

В данной брошюре мы рассмотрим несколько подходов к трактовке понятия вектора, включая и трактовку вектора как параллельного переноса на множестве точек плоскости или пространства. Так как последняя трактовка характерна для современного школьного курса геометрии, мы, естественно, возьмем ее за основу в последующем изложении.

§ 1. ВЕКТОРЫ

1.1. О трактовке понятия вектора

В соответствии с требованиями новой программы по математике понятие вектора стало одним из ведущих понятий школьного курса математики.

Действительно, понятие вектора тесно связано с принятой сейчас теоретико-множественной трактовкой основных понятий школьного курса математики. Например, с таким важнейшим понятием школьного курса геометрии, как понятие перемещения. Кроме того, понятие вектора находит достаточно широкие приложения при рассмотрении различных вопросов школьных курсов математики и физики.

Уже на уроках физики в VIII классе изложение материала ведется с широким привлечением векторного аппарата. Понятно, что это заставляет задуматься прежде всего над тем, как наиболее естественно ввести в курс математики восьмилетней школы понятие вектора, как эффективнее применять это понятие при изложении теории и решении задач, как рассматривать основные действия над векторами.

Известно, что существует несколько подходов к введению этого понятия.

В физике при помощи вектора изображаются различные направленные величины: сила, скорость, ускорение и т. п., в силу чего вектор обычно определялся здесь как направленный отрезок. При этом часто такая направленная величина оказывалась существенно связанной с определенной точкой (точкой ее приложения) или прямой.

В математике же обычно имеют дело с так называемым свободным вектором (вектором, не связанным ни с какой прямой и ни с какой фиксированной точкой).

В традиционных математических курсах вектор также определялся как направленный отрезок. При этом два вектора считались равными, если они имели одну и ту же длину и направление. Однако такое определение равенства векторов не вполне корректно, так как тем самым отождествляются два хотя и родственные, но различные понятия: равенство и эквивалентность. Между тем равенство математических объектов трактуется сейчас как их совпадение, а эквивалентность — как любое отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Это различие четко реализовано сейчас в школьном курсе математики (например, в понятиях равенства и конгруэнтности фигур).

Далее, равные сонаправленные отрезки принимались за представителей одного так называемого свободного вектора, который, таким образом, трактовался как бесконечное множество равных, одинаково направленных отрезков. Каждая точка плоскости при этой трактовке представляет собой начало некоторого отрезка из семейства отрезков на плоскости. Эти отрезки затем разбиваются на подмножества, в каждое из которых попадают лишь те, которые одинаково направлены и равны по длине. Тем самым осуществляется идея разбиения всех направленных отрезков плоскости на классы эквивалентности, при этом каждый направленный отрезок является «полномочным представителем» своего класса. Направленные отрезки одного класса рассматриваются как представители одного и того же свободного вектора.

Наконец, понятие вектора может быть принято за основное неопределяемое понятие (см. ЭЭМ. М., «Наука», 1966, т. V, с. 349).

Анализируя понятие вектора, нетрудно обнаружить, что с геометрической точки зрения вектор — это объект, характеризуемый направлением (т. е. некоторым множеством сонаправленных лучей) и длиной. Однако, как известно, теми же самыми признаками характеризуется и параллельный перенос (см.: Колмогоров А. Н. и др. Геометрия, VI класс. М., «Просвещение», 1973, с. 80). Поэтому представляется наиболее естественным всякий параллельный перенос назвать вектором (см. «Геометрия», VII класс. М., «Просвещение», 1975, с. 59).

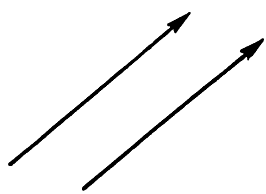


Рис. 1

Такой подход к введению понятия вектора не только логически безупречен, но и обладает целым рядом достоинств методического характера. Согласно прежнему определению вектора два направленных отрезка, изображенных на рисунке 1, считались равными векторами. Однако мы не можем в этом случае говорить о равенстве этих отрезков, так как речь идет о разных множествах точек. Не устроил бы нас и термин «конгруэнтность», так как в этом случае оказались бы конгруэнтными не только те два отрезка, которые нам нужны, но и, например, отрезки, изображенные на рисунке 2. Таким образом, возникают трудности: разные множества (с теоретико-множественной точки зрения) представляют один и тот же вектор.

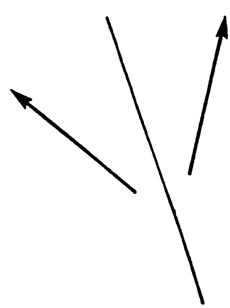


Рис. 2

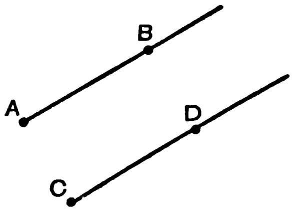


Рис. 3

Новое определение вектора не связано с понятием направленного отрезка. Под вектором понимают либо множество упорядоченных пар точек, задающих некоторый параллельный перенос, либо сам этот перенос. В школьном курсе геометрии параллельным переносом (вектором) называется отображение плоскости на себя, при котором все точки плоскости отображаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Такой подход к определению вектора как параллельного переноса позволяет устранить противоречия с теоретико-множественной точкой зрения на понятие равенства, которое возникало при традиционном определении вектора как направленного отрезка. Известно, что параллельный перенос задается парой точек*. Рассмотрим множество всех пар точек плоскости. Для элементов рассматриваемого множества введем следующее отношение: пары (A, B) и (C, D) будем называть эквивалентными и обозначать $(A, B) \sim (C, D)$, если $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$ и $|AB| = |CD|$ (рис. 3). Это те пары точек, которые задают один и тот же параллельный перенос. Эквивалентными между собой будем считать и пары, у которых первая точка совпадает со второй. Легко проверить, что такое отношение есть отношение эквивалентности, так как обладает следующими свойствами:

1) рефлексивности: $(A, B) \sim (A, B)$;

2) симметричности: если $(A, B) \sim (C, D)$, то $(C, D) \sim (A, B)$;

3) транзитивности: если $(A, B) \sim (C, D)$ и $(C, D) \sim (K, M)$, то $(A, B) \sim (K, M)$.

С помощью рассмотренного отношения эквивалентности производится разбиение множества пар точек плоскости на непересекающиеся подмножества (классы), элементами которых являются эквивалентные пары. Каждое из таких подмножеств можно назвать вектором. Следовательно, один и тот же параллельный перенос T (вектор) можно задать при помощи бесконечного множества эквивалентных между собой пар точек $(A, B) \sim (A_1, B_1) \sim (A_2, B_2) \ldots$ (рис. 4), т. е. $T = T_{AB} = T_{A_1B_1} = T_{A_2B_2} = \ldots$.

Поэтому естественно говорить, что направленные отрезки AB, A_1B_1, A_2B_2, ... «изображают» один и тот же вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} \ldots$.

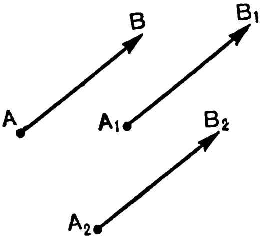


Рис. 4

Так как всякий класс (подмножество) эквивалентных пар определяется любым его представителем—любой его парой, то тем

* В школьных учебниках различают термины «две точки» и «пара точек»; в случае пары точек одна — первая, а другая — вторая. Мы не пользуемся словами «упорядоченная пара».

самым всякая пара точек плоскости задает (определяет) некоторый вектор на плоскости. При этом эквивалентные пары определяют один и тот же вектор, а неэквивалентные пары — различные векторы. Если вектор задается парой (A, B) $(A \neq B)$, то его обозначают $\overrightarrow{AB}$. Направление, определяемое лучом AB, называют направлением вектора $\overrightarrow{AB}$, а расстояние $|AB|$ — его длиной. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором. Пусть теперь вектор задается парой (B, B), т. е. парой, у которой первая точка совпадает со второй; такой вектор $\overrightarrow{BB}$ называется нулевым вектором и обозначается $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю, т. е. $|\overrightarrow{BB}| = |\vec{0}| = 0$, а направление его не определено. Итак, любой вектор $\vec{a}$ плоскости полностью определяется заданием одной пары точек A и B, где $B = \vec{a}\,(A)$. Заметим, что направленный отрезок AB выступает при такой трактовке вектора лишь как удобное наглядное изображение вектора. Любой вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ имеет бесконечное множество изображений в виде направленных отрезков.

Итак, мы рассмотрели возможность введения понятия вектора как множества пар точек, задающих один и тот же параллельный перенос, т. е. множество всех пар (X, Y), для которых $T(X)=Y$, есть вектор. Это множество пар (X, Y) иногда называют графиком параллельного переноса.

В современной трактовке принято отождествлять график с самим отображением. Все сказанное и привело к отождествлению в школьном курсе математики параллельного переноса и вектора как синонимов, обозначающих одно и то же понятие.

Понятие вектора, трактуемого как параллельный перенос, включается в систему тех понятий, с которыми учащиеся знакомятся в курсе геометрии VI класса, а затем получает дальнейшее развитие в курсе геометрии старших классов. Так, в учебном пособии по геометрии для IX класса под редакцией З. А. Скопеца параллельным переносом, определяемым парой (A, B) несовпадающих точек, называется преобразование пространства, при котором каждая точка M отображается на такую точку M_1, что луч MM_1 сонаправлен с лучом AB и расстояние $|MM_1|$ равно расстоянию $|AB|$. Таким образом, вектор определяется как множество пар точек, задающих один и тот же перенос (т. е. также по существу понятия вектора и параллельного переноса отождествляются). В пробном учебнике по геометрии для IX класса К. С. Барыбина (второе издание) понятие вектора трактуется аналогично, говорится: «пары точек, задающих один и тот же перенос, изображают один и тот же вектор».

Такая трактовка вектора значительно упрощает логическую схему изложения курса геометрии. Так, например, операция сложения векторов трактуется при этом как композиция параллельных переносов. Кроме того, эта трактовка понятия вектора дает возможность, определив само понятие вектора и операций над векторами на плоскости, распространить эти определения и на случай пространства. Поэтому в дальнейшем изложении мы будем рассматривать все вопросы одновременно для плоскости и пространства, при необходимости оговаривая те случаи, когда то или иное положение будет относиться лишь к векторам на плоскости или в пространстве. Так как вектор трактуется как параллельный перенос, то все известное учащимся о параллельном переносе распространяется и на него. Таким образом, в курсе геометрии VI—VIII классов параллельный перенос (или вектор) рассматривают уже как отображение всей плоскости на себя (а не какого-либо ее подмножества).

Векторы обозначают латинскими буквами со стрелкой наверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и т. д.

Мы говорили уже о том, что вектор можно задать одной из эквивалентных пар точек и что запись одного и того же вектора может быть различной. Так, вектор, изображенный на рисунке 4, можно записать так: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$.

Напомним, что в записи $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ речь идет о различных направленных отрезках AB и CD, изображающих один и тот же вектор $\vec{a}$, но не о равенстве (или конгруэнтности) этих векторов. Равенство векторов в школьном курсе совсем не определяется.

Вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ можно задать, во-первых, указанием расстояния ($r > 0$) и направления; во-вторых, соотношением $X \xrightarrow{\vec{a}} X_1 = \vec{a}(X)$, т. е. парой точек X и $\vec{a}(X)$.

Для дальнейшего важен случай, когда параллельный перенос осуществлен на нулевое расстояние, т. е. имеет место тождественное отображение $E(X)$ плоскости (или пространства). Такой параллельный перенос называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$. Для нулевого вектора также можно использовать различные обозначения: $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{XX}$.

Длина вектора выражается формулой $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$.

Направление вектора есть общее направление лучей, представляющих данный параллельный перенос. Для нулевого вектора направление не определено.

Один из наиболее важных моментов, связанных с введением понятия вектора, заключается в умении различать разные векторы и видеть одинаковые векторы. Например, две точки A и B, где $A \neq B$, задают два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Семь различных точек плоскости, из которых шесть точек — вершины правильного шестиугольника, а седьмая — центр описанной около него окружности, задают 19 различных векторов.

Важно также отчетливо понимать, что вектор есть отображение точек всей плоскости (или пространства) на себя. Запись $\vec{a}(X) = X_1$ следует читать так: вектор $\vec{a}$ отображает точку X плоскости (или пространства) на точку X_1 той же плоскости (или пространства). В этой связи можно трактовать записи $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ как записи отображений: $B = \vec{a}(A)$, $D = \vec{a}(C)$, при этом ясно, что $[AB)$ и $[CD)$ сонаправлены, а $|AB| = |CD|$.

§ 2. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

2.1. Композиция параллельных переносов

В теме «Векторы» рассматривается последовательное выполнение двух параллельных переносов.

Для доказательства того факта, что композицией параллельных переносов является также параллельный перенос, необходимо доказать следующую теорему.

Т е о р е м а. *Для того чтобы перемещение F было вектором, необходимо и достаточно, чтобы оно любой луч отображало на сонаправленный луч.*

Необходимость будет установлена, если докажем, что из $F = T$ следует справедливость соотношения: $\forall [OX)$: $([OX) \xrightarrow{T} [O_1X_1)) \Longrightarrow ([OX) \uparrow\uparrow [O_1X_1))$, т. е. мы должны доказать, что если перемещение есть вектор, то при этом любой луч отображается на сонаправленный ему луч.

Пусть вектор $\vec{a}$ задан парой точек (A, B), т. е. $B = \vec{a}(A)$ (рис. 5).

Рассмотрим произвольный луч OX и отобразим его с помощью вектора $\vec{a}$ (рис. 6). Точка O при этом отобразится на точку O_1, а прямая OX отобразится на параллельную ей прямую O_1X_1. Заметим, что каждая точка луча OX отобразится при этом на точку луча O_1X_1, так как $(OO_1) \parallel (XX_1)$, т. е. $[OX) \uparrow\uparrow [O_1X_1)$.

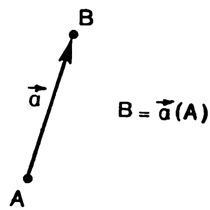


Рис. 5

Достаточность будет установлена, если докажем справедливость следующего утверждения: $\forall [AB)$: $([AB) \xrightarrow{F} [A_2B_2) \mid [AB) \uparrow\uparrow [A_2B_2)) \Longrightarrow F = T$, т. е. мы должны доказать, что если перемещение F отображает любой луч на сонаправленный ему луч, то это перемещение — вектор.

Пусть перемещение F отображает любой луч на сонаправленный ему луч и при этом точка A отображается на некоторую точку B (рис. 6). Но пара точек (A, B) задает вектор $\vec{a}$. Итак, $B = F(A) = \vec{a}(A)$.

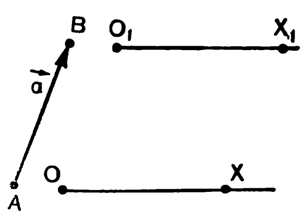


Рис. 6

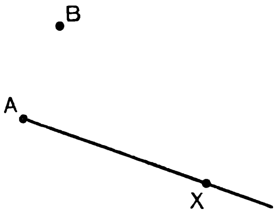


Рис. 7

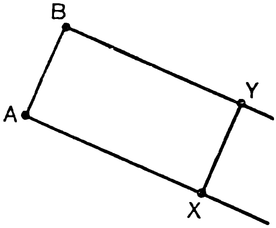


Рис. 8

Рассмотрим луч AX с началом в точке A (рис. 7). Перемещение F по условию теоремы отобразит его на сонаправленный луч BY с началом в точке B (рис. 8).

При этом $|AB| = |XY|$ и $(AB) \parallel (XY)$, но тогда $\vec{a}(X) = Y$, а значит, $F = \vec{a}$. Что и требовалось доказать.

Теперь докажем сформулированное выше предложение.

Теорема. *Композиция параллельных переносов (векторов) есть параллельный перенос (вектор).*

Доказательство этой теоремы состоит из двух частей.

1) Композиция параллельных переносов есть перемещение.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и X и Y — любые точки плоскости.

$$\vec{a}(X) = X_1;\ \vec{a}(Y) = Y_1 \text{ и } |XY| = |X_1Y_1|;$$

$$\vec{b}(X_1) = X_2;\ \vec{b}(Y_1) = Y_2 \text{ и } |X_1Y_1| = |X_2Y_2|.$$

Тогда $\vec{b}\,(\vec{a}(X)) = X_2$ и $\vec{b}\,(\vec{a}(Y)) = Y_2$; $|XY| = |X_2Y_2|$.

Таким образом, $\vec{b} \circ \vec{a}$ — перемещение.

2) Композиция $\vec{b} \circ \vec{a}$ отображает любой луч на сонаправленный ему луч.

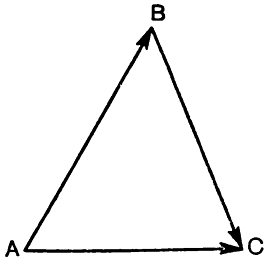
Вектор $\vec{a}$ по условию отображает любой луч на сонаправленный ему, т. е. $l \uparrow\uparrow l_1$, где l_1 — образ луча l при отображении вектором $\vec{a}$.

Пусть l_2 — образ луча l_1 при отображении его вектором $\vec{b}$, а значит, $l_1 \uparrow\uparrow l_2$. По свойству транзитивности отношения сонаправленности лучей (см. п. 3 учебника геометрии для VI класса) $l_2 \uparrow\uparrow l$. Итак, $\vec{b} \circ \vec{a}$ — перемещение, отображающее любой луч на сонаправленный ему луч, а значит, $\vec{b} \circ \vec{a}$ — вектор (см. предыдущую теорему).

2.2. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число

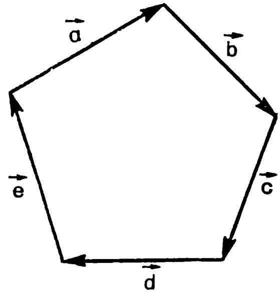
Сложение и вычитание векторов.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется отображение плоскости на себя, являющееся результатом последовательного выполнения отображений $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (т. е. композиция $\vec{b} \circ \vec{a}$).



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Рис. 9



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\vec{0}$

Рис. 10

Сумма векторов может обозначаться так:

$$\vec{a}+\vec{b} \text{ или } (\vec{a}+\vec{b})(X)=\vec{b}(\vec{a}(X)).$$

Отметим, что в методической литературе имеет место упрощение терминологии. Например, говорится: «построить вектор $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$», что означает: построить направленный отрезок, изображающий вектор $\overrightarrow{AB}$, который является суммой двух данных векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$. Мы также будем использовать подобные упрощения в терминологии.

Известное правило треугольника, вытекающее из определения суммы векторов, позволяет геометрически найти сумму данных векторов (рис. 9). Интересен случай, изображенный на рисунке 10. Здесь сумма векторов оказалась нуль-вектором. Этот случай ярко иллюстрирует отличие смысла математического термина «перемещение» от его житейского толкования (путь). Если, например, ситуацию, изображенную на рисунке 10, истолковать как поведение путешественника в незнакомом городе, который долго бродил по улицам и вернулся в гостиницу (им проделан значительный путь), то перемещение (результат пути) выражается нулевым вектором. Путешественник «отобразился» в исходную точку.

Рассмотрим физическую задачу, при решении которой используется сложение векторов.

Задача. Лодка движется от одного берега к другому со скоростью $\vec{v}_1$; скорость течения реки $\vec{v}_2$. Какова истинная скорость движения лодки?

Р е ш е н и е. Изобразим условия задачи с помощью векторов (рис. 11). Тогда решением задачи будет $\vec{v}_{\text{ист}}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$.

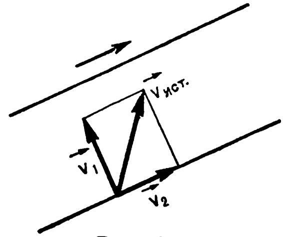


Рис. 11

Так как любое перемещение F обратимо, то F^{-1} также является перемещением, причем $F^{-1}\circ F=F\circ F^{-1}=E$. Если $F=\vec{a}$,

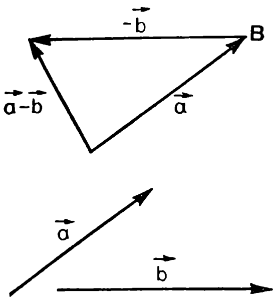


Рис. 12

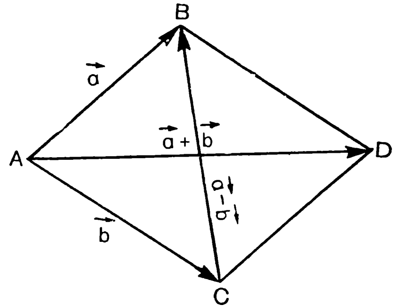


Рис. 13

тогда по определению $F^{-1} = -\vec{a}$ есть противоположный вектор, а из утверждения $F^{-1} \circ F = E$ следует, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Из определения суммы векторов получаем закон поглощения нулевого вектора: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Нетрудно установить, что из равенства $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ следует $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. В самом деле, $\vec{b} + [\vec{a} + (-\vec{b})] = \vec{b} + [(-\vec{b}) + \vec{a}] = (\vec{b} + (-\vec{b})) + \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$*.

Отсюда естественным образом получаем определение разности $\vec{a} - \vec{b}$ как вектора $\vec{c}$, такого, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Геометрическое построение разности векторов представлено на рисунке 12: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Заметим, что операции сложения и вычитания векторов нередко встречаются в жизненных ситуациях, на которые мы обычно не обращаем внимания. Например,

1) пешеход в безветренную дождливую погоду наклоняет зонтик вперед, хотя дождь падает отвесно;

2) дождевые полосы на окнах вагона двух встречных поездов имеют различные направления.

Отметим, что разность и сумма двух векторов могут изображаться направленными диагоналями одного и того же параллелограмма (рис. 13).

Умножение вектора на число. Умножение вектора на число можно определить так:

1) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; 2) $k \cdot \vec{0} = 0$;

3) если $k > 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $k \cdot \vec{a}$ есть вектор направления $\vec{a}$ длины $k|\vec{a}|$;

---

* Здесь мы пользуемся законами коммутативности и ассоциативности сложения векторов (см. п. 2.5).

4) если $k < 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $k \cdot \vec{a}$ есть вектор направления, противоположного направлению $\vec{a}$, длины $|k| \cdot |\vec{a}|$. Числовой множитель пишут слева.

Произведение вектора на число можно определить и так, как это сделано в учебнике геометрии для VII класса (Геометрия, VII класс, М., «Просвещение», 1975, с.90): «Произведением вектора $\vec{a}$ на число x называется вектор, имеющий (при $\vec{a} \neq \vec{0}$) направление вектора $\vec{a}$, если $x > 0$, и противоположное направление, если $x < 0$. Длина этого вектора равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа x».

Заметим, что оговорка, сделанная в данном определении относительно $\vec{a}\,(\vec{a} \neq \vec{0})$, необходима для указания направления вектора $x \cdot \vec{a}$ (в этом случае необходимо оговаривать и то, что $x \neq 0$). Для указания длины этого вектора такие оговорки не нужны.

Приняв это определение умножения вектора на число, необходимо особо рассмотреть случаи умножения вектора на число 0 и умножение нулевого вектора на любое число x.

Из определения следует, что $|x \cdot \vec{a}| = |x| \cdot |\vec{a}|$. (1)

а) Пусть $|x| = 0$, тогда правая часть равенства (1) есть нуль. Значит, $|x \cdot \vec{a}| = 0$, т. е. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ для любого $\vec{a}$.

б) Пусть $\vec{a} = \vec{0}$, тогда $|\vec{a}| = |\vec{0}| = 0$, т. е. правая часть равенства (1) также обращается в нуль для любого числа x. Значит, $|x \cdot \vec{a}| = 0$, т. е. $x \cdot \vec{0} = \vec{0}$ (закон поглощения нулевого вектора).

Прежде чем рассматривать остальные свойства операции умножения вектора на число, рассмотрим вопрос о коллинеарных и компланарных векторах.

2.3. Коллинеарные векторы

Пусть O — любая точка плоскости. Каждый вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ имеет, как известно, бесконечно много изображений в виде направленных отрезков. Заметим, что легко осуществить операцию по построению направленного отрезка OK, для которого $\overrightarrow{OK} = \vec{a}$. Действительно, с этой целью достаточно через точку O провести луч с началом в точке O, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$, а затем на этом луче отложить отрезок OK длины $|\vec{a}|$. Операцию построения направленного отрезка OK, для которого $\overrightarrow{OK} = \vec{a}$, называют откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки O.

Пусть на плоскости заданы сонаправленные или противоположно направленные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 14). Каждый из этих векторов отложим от одной и той же точки O. Мы видим, что они изображаются направленными отрезками одной и той же прямой.

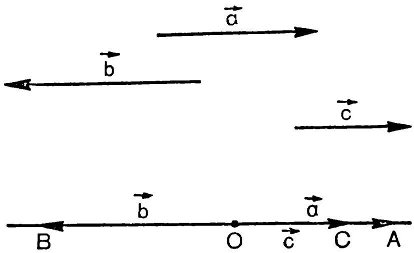


Рис. 14

Векторы, которые могут быть изображены направленными отрезками одной и той же прямой, называются **коллинеарными**. Таким образом, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Можно также сказать, что ненулевые векторы коллинеарны, если их направления совпадают или противоположны.

Заметим, что вектор $\vec{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$, тогда и только тогда, когда существует такое число $k \neq 0$, что выполняется равенство $\vec{a} = k\vec{b}$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Используя операцию откладывания вектора от некоторой точки O, всегда можно любые векторы, заданные на плоскости, привести к этой точке (сделать ее началом направленных отрезков, изображающих данные векторы).

В ряде случаев оказывается удобным рассматривать векторы в некоторой системе координат.

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат xOy.

Отложив на лучах Ox и Oy отрезки единичной длины OE_x и OE_y, получим два вектора, которые принято обозначать:

$$\overrightarrow{OE_x} = \vec{i}, \ \overrightarrow{OE_y} = \vec{j}.$$

Мы видим, что система координат может быть определена указанием точки O и единичных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ взаимно перпендикулярны и имеют одинаковую длину. Значит, можно считать, что произвольная прямоугольная декартова система координат задается указанием начальной точки O и двух взаимно перпендикулярных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ одинаковой длины*.

Существует взаимно-однозначное отображение $\vec{a} = \overrightarrow{OA} \to A$ множества всех векторов $\vec{a}$ на множество всех точек A плоскости**, а также отображение $A \to (x, y)$, т. е. множество всех точек A плоскости на множество всех пар чисел (x, y). Возникающее отсюда отображение $\vec{a} \to (x, y)$ тоже взаимно-однозначно. Поэтому числа x и y можно считать и координатами вектора $\vec{a}$: они однозначно определяются вектором $\vec{a}$ и, в свою очередь, взятые вместе, однозначно определяют вектор $\vec{a}$. Нетрудно усмотреть, что $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

* Неравные нулю векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ перпендикулярны, если угол между направлениями этих векторов прямой. Нулевой вектор считают перпендикулярным любому другому.

** См. «Геометрия». Учебное пособие для 8 класса. Изд. 4. М., 1975, с. 20.

Таким образом, вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ единственным образом.

Координаты вектора $\vec{a}$ обозначаются a_x и a_y соответственно.

Мы исходили из определенной системы координат, заданной точкой O и векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Но нетрудно заметить, что коэффициенты a_x и a_y представления $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ не зависят от выбора точки O.

Векторы $\vec{a}_x = a_x \cdot \vec{i}$, $\vec{a}_y = a_y \cdot \vec{j}$ называются составляющими вектора $\vec{a}$ в данной системе координат.

Так как коллинеарные векторы могут быть изображены направленными отрезками одной прямой, возникает возможность выражения коллинеарных векторов через координаты точек прямой. Отсюда можно найти условие, при котором направленные отрезки прямой изображают один и тот же вектор.

Обозначим $\vec{e} = \overrightarrow{OE} \neq \vec{0}$, где O — начальная точка (нулевая). Тогда $|\overrightarrow{OE}| = e$ — единица длины. Так как каждая точка прямой характеризуется своей абсциссой x_A, x_B и т. д., нетрудно установить условие совпадения векторов на прямой:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (|x_B - x_A| = |x_D - x_C|) \wedge (Sign\ (x_B - x_A) = Sign\ (x_D - x_C))$, т. е. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow x_B - x_A = x_D - x_C$.

Пусть, например,

$x_A = 2$; $x_B = -4$; $x_C = 7$; $x_D = 1$; тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, так как $-4 - 2 = 1 - 7$; $-6 = -6$.

В векторном исчислении и его приложениях большое значение имеет представление (разложение) вектора в виде суммы нескольких векторов, называемых составляющими данного вектора. Разложить вектор $\vec{c}$ по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это значит представить его в виде суммы двух векторов, которые будут коллинеарны данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пусть заданы три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Разложим вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для того чтобы разложить вектор $\vec{c}$ по двум векторам (неколлинеарным) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, надо представить $\vec{c}$ в виде суммы двух векторов, коллинеарных соответственно $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для этого от точки O отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 15).

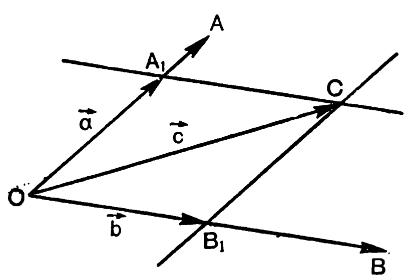


Рис. 15

Через точку C проведем прямые, параллельные отрезкам OA и OB. Получим параллелограмм, в котором $[OC]$ — диагональ. В этом параллелограмме $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$, причем $\overrightarrow{OA_1}$ коллинеарен $\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1}$ коллинеарен $\vec{b}$. Значит, можно найти такие числа x и y, что $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1} = y\vec{b}$. А тогда $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т. е. мы представили $\vec{c}$ в виде суммы двух векторов $x\vec{a}$ и $y\vec{b}$, соответственно коллинеарных $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Докажем теперь единственность разложения вектора $\vec{c}$. Доказательство проведем методом от противного.

Допустим, что вектор $\vec{c}$ можно разложить двумя способами: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ и $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$, где $x \neq x_1$, $y \neq y_1$. Так как $\vec{c}$ — один и тот же вектор, то, применяя свойства сложения векторов и умножения вектора на число*, имеем:

$$x_1\vec{a} + y_1\vec{b} = x\vec{a} + y\vec{b},\ x_1\vec{a} - x\vec{a} = y\vec{b} - y_1\vec{b},$$

$$(x_1 - x)\,\vec{a} = (y - y_1)\vec{b},\quad \vec{a} = \frac{y - y_1}{x_1 - x}\,\vec{b}.$$

Следовательно, $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$. Получили противоречие с условием. И потому $x_1 = x$ и $y_1 = y$.

Итак, установлено существование и единственность такого разложения.

В общем случае, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные неколлинеарные векторы, заданные в определенном порядке ($\vec{a}$ — первый, $\vec{b}$ — второй векторы (базиса)), а $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то числа x и y называют координатами вектора $\vec{c}$ относительно базиса $(\vec{a}, \vec{b})$.

Разложение вектора $\vec{c}$ по двум перпендикулярным векторам, или, другими словами, по направлениям координатных осей декартовой прямоугольной системы координат xOy, заданной в плоскости (рис. 16), является частным случаем рассмотренного выше разложения.

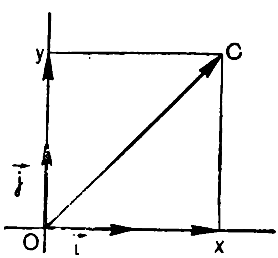


Рис. 16

Следовательно, и в этом случае $\overrightarrow{OC} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ называются **базисными** векторами; также говорят, что они образуют **координатный базис**. Пред-

---

* О свойствах операций над векторами см. в пункте 2.5 данного параграфа.

ставление вектора $\vec{c}$ в виде суммы (составляющих векторов) называется разложением этого вектора по базису $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Коэффициенты x и y при базисных векторах $\vec{i}$ и $\vec{j}$ называют декартовыми координатами вектора $\vec{c}$. В дальнейшем вектор $\vec{c}$, заданный координатами x и y, будем обозначать так: $\vec{c} = (x, y)$, и записывать: $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$. В этом случае будем говорить, что вектор задан в координатной форме.

2.4. Компланарные векторы

Три или большее число ненулевых векторов называются компланарными, если лучи, задающие их направления, лежат на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

Например, на рисунке 17 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$, которые компланарны, а на рисунке 18 — некомпланарные векторы.

Отметим, что три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда выполняется равенство $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$, где m, n, p — одновременно неравные нулю действительные числа (т. е. $m^2 + n^2 + p^2 \neq 0$).

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, то их сумма (вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$) изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис. 19).

Рассмотрим вопрос о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Разложить вектор по трем некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$,

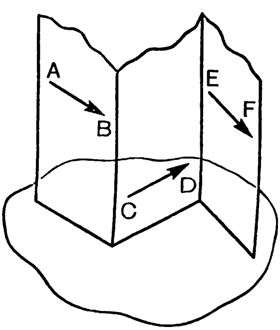


Рис. 17

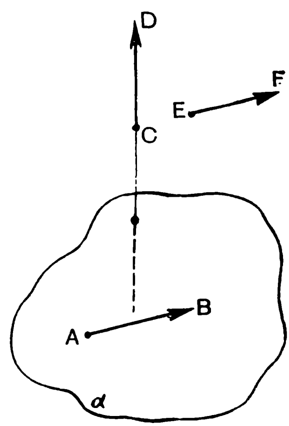


Рис. 18

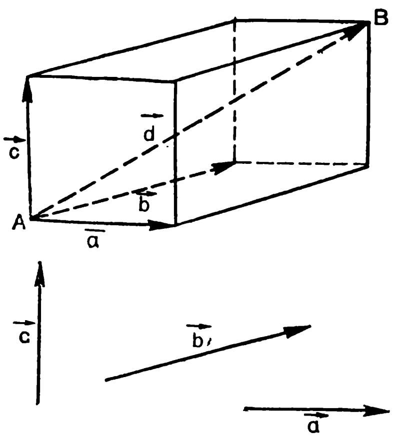


Рис. 19

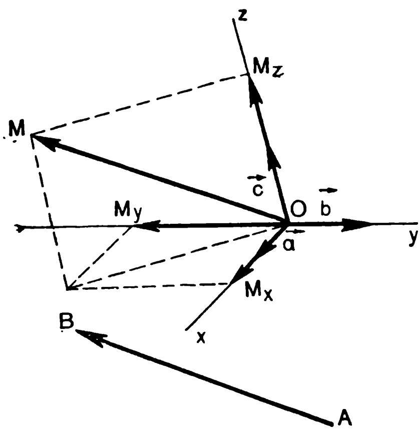


Рис. 20

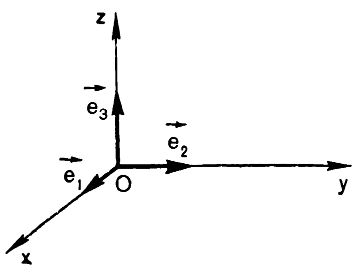


Рис. 21

$\vec{c}$ — это значит представить его в виде суммы трех векторов, коллинеарных соответственно векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Теорема. *Всякий вектор* $\overrightarrow{AB}$ (рис. 20) *можно единственным образом разложить по трем некомпланарным векторам* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Так же, как и в случае плоскости, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются базисными, а разложение вектора AB по этим векторам— разложением вектора по базисным векторам.

Проведем в пространстве через точку O три попарно перпендикулярные прямые Ox, Oy, Oz. Зададим на них орты $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (рис. 21), тогда получим прямоугольную декартову систему координат в пространстве.

Примечание. Если угол между какими-либо осями координат отличен от прямого, то такую систему координат называют аффинной.

Имеет место теорема: *система координат в пространстве вполне определяется заданием трех некомпланарных векторов, отложенных от одной точки и взятых в определенном порядке.*

Пусть в системе координат задан вектор $\overrightarrow{AB}$. По теореме о единственности разложения вектора по трем некомпланарным векторам можем записать: $\overrightarrow{AB} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, где x, y, z — числа, называемые координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ относительно данной системы координат.

Векторы $x\vec{e}_1$, $y\vec{e}_2$, $z\vec{e}_3$ называются составляющими вектора $\overrightarrow{AB}$.

2.5. Свойства операций над векторами

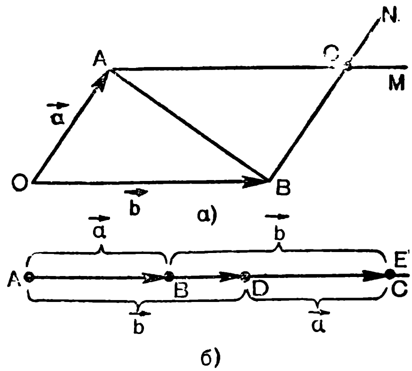


Рис. 22

Основные законы векторной алгебры представлены следующими свойствами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — коммутативность;

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ — ассоциативность;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ — закон поглощения нулевого вектора;

4) $(xy)\cdot\vec{a}=x(y\cdot\vec{a})$ — сочетательность;

5) $x\vec{a}+y\vec{a}=(x+y)\vec{a}$ — первый распределительный закон;

6) $x\vec{a}+x\vec{b}=x(\vec{a}+\vec{b})$ — второй распределительный закон;

7) $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$ — закон поглощения нуля;

8) $x\cdot\vec{0}=\vec{0}$ — закон поглощения нулевого вектора.

Рассмотрим для примера доказательство свойства коммутативности векторов.

При доказательстве коммутативности сложения векторов на плоскости необходимо рассмотреть два случая.

1-й случай. $\vec{a}$, $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы (рис. 22, *а*). Пусть $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

1) Строим параллелограмм $OACB$: $[AM)\parallel[OB)$, $[BN)\parallel[OA)$, $C=[AM)\cap[BN)$;

2) $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$, так как $\begin{cases}[OA)\uparrow\uparrow[BN) \text{ и } |OA|=|BC|,\\ [OB)\uparrow\uparrow[AM) \text{ и } |OB|=|AC|;\end{cases}$

3) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$, значит,

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, транзитивность равенства.

2-й случай. $\vec{a}$, $\vec{b}$ — коллинеарные векторы (рис. 22, *б*).

1) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BE}$, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AE}$,
$\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{a}=\overrightarrow{DC}$, $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AC}$;

2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $x_B-x_A=x_C-x_D$,
$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}$, $x_E-x_B=x_D-x_A$,
$x_B-x_A+x_E-x_B=x_C-x_D+x_D-x_A$,
$x_E=x_C$,

3) $\left.\begin{array}{l} x_C = x_E \\ x_A = x_A \end{array}\right\}$ $x_C - x_A = x_E - x_A$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$.

Полезно иметь в виду аналогию свойств сложения векторов со свойствами сложения и умножения чисел.

$(\vec{a}, +)$	$(R, +)$
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,	$m + n = n + m$,
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,	$(m + n) + k = m + (n + k)$,
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,	$m + (-m) = 0$,
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.	$m + 0 = 0 + m = m$.

$$(R, \cdot)$$

$$m \cdot n = n \cdot m,$$

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k),$$

$$m \cdot \frac{1}{m} = 1 (m \neq 0),$$

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m = m.$$

Легко доказываются свойства умножения вектора на число:

$$k \cdot (l \cdot \vec{a}) = (k \cdot l) \cdot \vec{a} \text{ (ассоциативность)*},$$

$$(k + l) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{a} \text{ (первый дистрибутивный закон)}.$$

Здесь все входящие в рассмотрение векторы можно изображать парами точек (или направленными отрезками), лежащими на одной прямой. Поэтому, по аналогии с соответствующими свойствами действительных чисел, эти свойства по существу нам хорошо знакомы.

Более сложно доказывается дистрибутивный закон: $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$. Доказательство этого закона дается в восьмилетней школе только для рационального k.

2.6. Скалярное произведение двух векторов и его свойства

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению числовых значений длин этих векторов на косинус угла между векторами.

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.

Пример. Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины которых $|\vec{a}| = 2$ и $|\vec{b}| = 3$, угол между ними равен 60°. Тогда скалярное произведение этих векторов будет равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 2 \cdot 3 \cos 60^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Если из двух векторов хотя бы один вектор нулевой, то скалярное произведение таких векторов принимается равным нулю.

* Доказательство ассоциативности можно найти в учебнике VII класса.

Свойства скалярного произведения.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (коммутативность).

2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивность).

3. $m\vec{a} \cdot n\vec{b} = (m \cdot n)\vec{a} \cdot \vec{b}$, т. е. числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения.

4. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.

Из этого свойства вытекает справедливость следующей теоремы: *для того, чтобы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов было равно нулю, т. е.* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

5. Выражение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ будем обозначать a^2 и называть скалярным квадратом вектора $\vec{a}$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату числового значения его длины, т. е. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$.

6. Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение числовых значений длин векторов, т. е.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

2.7. Операции над векторами, заданными своими прямоугольными координатами

Как известно, любой вектор в пространстве можно разложить по трем данным некомпланарным векторам. На практике чаще всего в качестве тройки векторов используют упорядоченную тройку $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ попарно ортогональных единичных векторов. Пусть разложение вектора $\vec{a}$ по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ имеет вид:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Числа a_x, a_y, a_z называют координатами вектора $\vec{a}$ относительно базиса $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Так как в данном случае базис прямоугольный, то они получили название прямоугольных (декартовых) координат. Для обозначения используется краткая запись:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Известно, что если вектор $\vec{a}$ задается парой (A, B), где точки A и B в прямоугольной (декартовой) системе координат заданы своими координатами $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ имеет следующие прямоугольные координаты:

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1.$$

Например, направленный отрезок, изображающий вектор $\overrightarrow{AB}$, имеет начало в точке A (3; 2; —1) и конец в точке B (4; —5; 3); тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ имеют вид:
$a_x = 4 - 3 = +1$, $a_y = -5 - 2 = -7$, $a_z = +3 - (-1) = +4$.

Итак, $\overrightarrow{AB} = (+1, -7, +4)$.

Свойства операций над векторами. Имеют место следующие теоремы об операциях над векторами, заданными в координатной форме.

1. Пусть даны $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогда сумма этих векторов есть вектор $\vec{c}$, координаты которого равны сумме одноименных координат слагаемых векторов, т. е. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z)$.

П р и м е р. $\vec{a} = (3; 4; 6)$ и $\vec{b} = (-1; 4; -3)$, тогда
$\vec{c} = (3+(-1);\ 4+4;\ 6+(-3)) = (2;\ 8;\ 3)$.

2. $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогда разность этих векторов есть вектор $\vec{c}$, координаты которого равны разности одноименных координат данных векторов, т. е.

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x;\ a_y - b_y;\ a_z - b_z).$$

П р и м е р. $\vec{a} = (-2;\ 8;\ -3)$ и $\vec{b} = (-4;\ -5;\ 0)$, тогда
$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (-2 - (-4);\ 8 - (-5);\ -3 - 0) = (2;\ 13;\ -3)$.

3. При умножении вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ на число m все его координаты умножаются на это число, т. е.

$$m\vec{a} = (ma_x;\ ma_y;\ ma_z).$$

П р и м е р. $\vec{a} = (-8;\ 4;\ 0)$ и $m = 3$, тогда

$$3\vec{a} = (-8 \cdot 3;\ 4 \cdot 3;\ 0 \cdot 3) = (-24;\ 12;\ 0).$$

4. Пусть $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений одноименных координат данных векторов, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

П р и м е р. Пусть $\vec{a} = (1;\ -5;\ 8)$ и $\vec{b} = (0;\ 3;\ -2)$, тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + (-5) \cdot 3 + 8 \cdot (-2) = -31.$$

5. Пусть вектор $\vec{a}$ задан координатами, т. е. $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Тогда числовое значение его длины $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, а косинусы углов между направлениями вектора $\vec{a}$ и положительными направлениями осей координат (т. е. ортами) вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Эти косинусы называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Пример. Найти числовое значение длины и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (-2;\ 3;\ -5)$.

Решение. Находим числовое значение длины вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{a^2_x + a^2_y + a^2_z} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{38}$; далее,

$$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{38}},\quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{38}},\quad \cos\gamma = \frac{-5}{\sqrt{38}}.$$

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Понятие вектора, которое нашло широкое распространение в прикладных науках, явилось плодотворным и в геометрии. Аппарат векторной алгебры позволил упростить изложение некоторых сложных геометрических понятий, доказательства некоторых теорем школьного курса геометрии, позволил создать особый метод решения различных геометрических задач.

3.1. Применение векторов при доказательстве теорем

В учебных пособиях по геометрии, начиная с 7 класса, уже используется векторный аппарат при доказательстве некоторых теорем. К таким теоремам можно отнести следующую:

Если при гомотетии с коэффициентом k точки X и *Y отображаются на точки X_1 и Y_1, то $\overrightarrow{X_1Y_1} = k\overrightarrow{XY}$.*

Из этой теоремы получаем важные свойства гомотетии:

а) при гомотетии с коэффициентом k все расстояния между точками умножаются на $|k|$;

б) гомотетичные фигуры подобны;

в) при гомотетии с положительным коэффициентом каждый луч отображается на сонаправленный с ним луч. При гомотетии с отрицательным коэффициентом каждый луч отображается на противоположно направленный с ним луч (рис. 23).

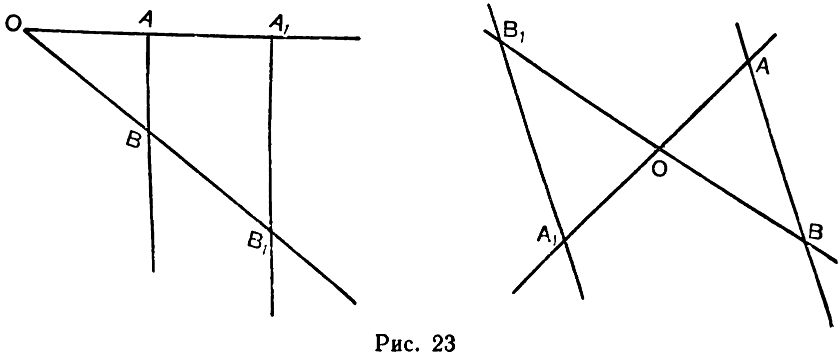


Рис. 23

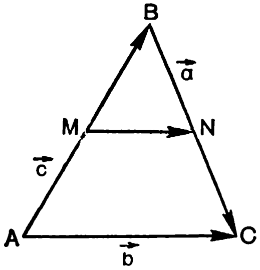


Рис. 24

Из свойства (в) следует, что при гомотетии прямая отображается на параллельную ей прямую, отрезок—на параллельный ему отрезок, угол — на конгруэнтный ему угол.

Итак, эта теорема позволяет отнести гомотетию к преобразованиям подобия (само определение гомотетии в своей формулировке этого не содержит). Заметим, что с использованием векторов в разделе о гомотетии и подобии доказывается еще одна теорема:

Если отрезки OA_1 и OB_1 пропорциональны отрезкам OA и OB и лежат соответственно на лучах OA и OB, то прямые A_1B_1 и AB параллельны.

Важную роль играют векторы при изучении тригонометрических функций в VIII классе. Здесь тригонометрические функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяются как координаты точек единичной окружности, а соотношения между элементами в прямоугольном треугольнике получаются из рассмотрения формул, связывающих координаты произвольного и единичного вектора:

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha,\quad a_y = |\vec{a}|\sin\alpha.$$

Пользуясь векторами, можно доказать известные нам теоремы планиметрии. Так, например, в учебном пособии по геометрии для VI класса доказана теорема Фалеса. Доказательство ее фактически сводится к осуществлению параллельного переноса, отображающего точку A_1 на точку C_1.

Следствием из этой теоремы является теорема о средней линии треугольника (ниже эта теорема доказана иначе).

Рассмотрим доказательство некоторых теорем с помощью векторов.

Теорема 1. *Средняя линия треугольника параллельна его третьей стороне и равна половине ее.*

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 24). Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, тогда по определению суммы векторов: $\vec{c} + \vec{a} = \vec{b}$. Пусть M и N — середины сторон AB и BC $\triangle ABC$, тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{c}}{2} + \frac{\vec{a}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b}$.

Так как $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{b}$, то $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Таким образом, $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$, следовательно, $[AC] \parallel [MN]$. Так как $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, то $|MN| = \frac{1}{2}|AC|$.

Теорема 2. *Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 25).

1. Положим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ($|AB| = |CD| = a$; $|AD| = |BC| = b$).

2. По определению суммы и разности векторов $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

3. Используя свойство скалярного квадрата, получим:

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{DB}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2,$$ т. е.

$$|AC|^2 + |DB|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2,$$ так как

$$\overrightarrow{AC}^2 = |AC|^2,\ \overrightarrow{DB}^2 = |DB|^2.$$

Теорема 3. *Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный ромб (рис. 26).

1. Введем обозначения: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Из определения ромба: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

2. По определению суммы и разности векторов $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

3. Рассмотрим $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - b^2$ (по свойствам скалярного произведения).

4. Так как стороны ромба равны, то $a = b$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Из последнего получаем: $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$, т. е. $[DB] \perp [AC]$.

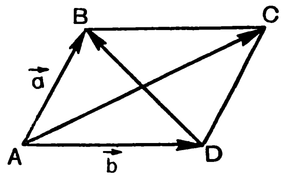


Рис. 25

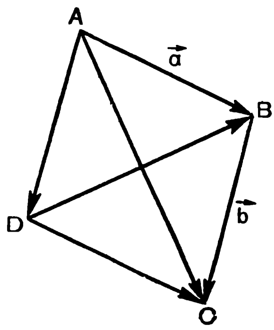


Рис. 26

Теорема 4. *Диагонали прямоугольника равны между собой.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник (рис. 27).

1. Введя обозначения $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, получим $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

2. Найдем квадраты диагоналей, используя свойство скалярного произведения: $\overrightarrow{AC}^2 = |AC|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = a^2 + b^2$, так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, ибо в прямоугольнике $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Итак, $|AC|^2 = a^2 + b^2$. Далее, $\overrightarrow{DB}^2 = |DB|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = a^2 + b^2$, так как $\vec{a} \perp \vec{b}$.

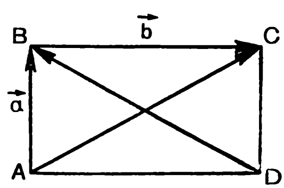


Рис. 27

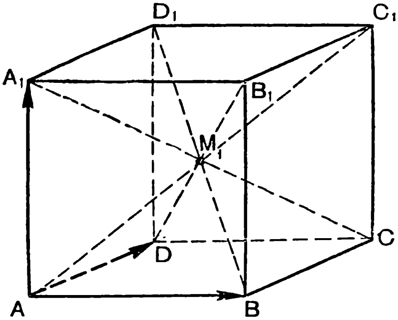


Рис. 28

Следовательно, $|AC|^2 = |DB|^2 = a^2 + b^2$, т. е. $|AC| = |DB|$.

Особую роль играют векторы при изучении стереометрии, где они находят широкое применение при изучении теоретического материала. Именно через разложение вектора по некомпланарным векторам и использование свойств скалярного произведения доказывается существование перпендикулярных прямой и плоскости (см. «Геометрия», 9 класс, с. 67, М., «Просвещение», 1975). С использованием векторов доказывается также теорема косинусов для трехгранного угла (см. «Геометрия», 9 класс, с. 117, М., «Просвещение», 1975).

В X классе при изучении многогранников с помощью векторов доказывается теорема о пересечении диагоналей параллелепипеда.

Теорема 5. *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.*

Доказательство. Пусть дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 28).

Если M_1 — середина диагонали AC_1, то $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Пусть M_2 — середина $[BD_1]$, тогда $\overrightarrow{AM_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Аналогично получим: $\overrightarrow{AM_3} = \overrightarrow{AM_4} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

Следовательно, $M_1 = M_2 = M_3 = M_4$.

3.2 Применение векторов при решении задач

Введение в школьный курс геометрии векторного аппарата вооружает учащихся еще одним методом решения геометрических задач — векторным. Возможности этого метода довольно широки, поскольку он охватывает многочисленные аффинные задачи, а после введения скалярного произведения векторов — и метрические.

1. Аффинные задачи. Хорошо известны те трудности, с которыми сталкиваются учащиеся и учитель, когда речь идет о решении аффинных задач. Наиболее слабо разработана методика решения геометрических задач, в особенности аффинных, с использованием векторного аппарата. При этом особое затруднение испытывают учащиеся при выборе метода, с помощью которого они будут решать ту или иную задачу.

Выделим несколько видов задач, которые целесообразно решать с применением векторов. При этом обращаем внимание на задачи, в тексте которых не содержится никаких понятий векторной алгебры (т. е. чисто геометрические).

Здесь не рассматривается система задач каждого вида, конкретный вид иллюстрируется задачами средней сложности. Вместе с тем указываются те требования, которые предъявляются к задачам данного вида. Следует отметить, что рассмотренные ниже три вида задач достаточно распространены среди тех задач, которые приходится решать учащимся средней школы.

К первому виду отнесем задачи, связанные с доказательством параллельности некоторых отрезков и прямых. В задачах этого типа для решения нужно показать коллинеарность векторов, изображаемых некоторыми данными отрезками, т. е. доказать, что $\vec{a} = k\vec{b}$, где k — некоторое число. Рассмотрим решение задач такого вида на примерах.

Задача 1. В плоскости даны четырехугольник $ABCD$ и точка M. Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон этого четырехугольника, являются вершинами параллелограмма.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 29), а N, P, Q и R — точки, симметричные точке M относительно середин $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ и $[DA]$.

Согласно «правилу параллелограмма» имеем: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA}$. (1)

По определению разности векторов: $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MP}$.

Так как $\overrightarrow{NR} - \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MN}) - (\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MP})$, то, используя равенства (1), убеждаемся, что $\overrightarrow{NR} - \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{PQ}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{RQ}$. Следовательно, $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{RQ}$, а это значит, что четырехугольник $NPQR$ — параллелограмм.

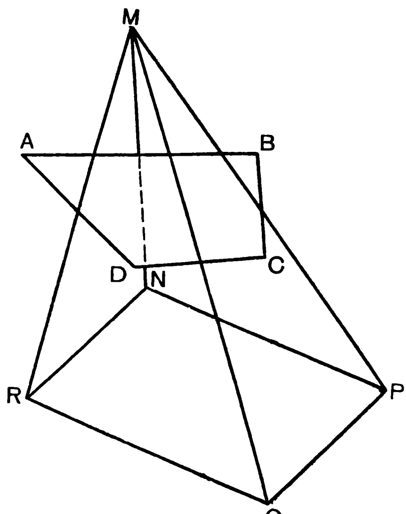


Рис. 29

Задача 2. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямая, проведенная через вершину A параллельно (BC), пересекает (BD) в точке M,

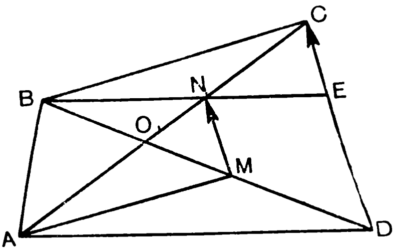


Рис. 30

а прямая, проведенная через вершину B параллельно стороне AD, пересекает (AC) в точке N. Доказать, что $[MN] \parallel [DC]$.

Решение. Для решения задачи достаточно доказать коллинеарность векторов (рис. 30), т. е. надо доказать, что $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{MN}$, где k — некоторое число. Но векторы $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{MN}$ непосредственно один через другой не выражаются, т. е. их коллинеарность видна не сразу. Чтобы убедиться в их коллинеарности, нужно выразить каждый из этих векторов через некоторые другие векторы. При этом замечаем следующее: вектор $\overrightarrow{DC}$ легко выражается через векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, вектор $\overrightarrow{MN}$ — через векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$, где $O = (AC) \cap (BD)$. А векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{ON}$ можно выразить через вектор $\overrightarrow{AO}$, векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OM}$ — через вектор $\overrightarrow{BO}$. Отношение длин отрезков диагоналей четырехугольника можно принять равным отношению чисел: $|AO| : |OC| = p : q$, $|BO| : |OD| = m : n$ (1). Тогда можно выразить вектор $\overrightarrow{DC}$ через $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$ последовательными заменами:

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \frac{q}{p}\overrightarrow{AO} - \frac{n}{m}\overrightarrow{BO} = \frac{1}{mp}(mq\,\overrightarrow{AO} - np\,\overrightarrow{BO}).$$

С другой стороны, из параллельности отрезков BE и AD вытекает $|AO| : |ON| = |DO| : |OB| = n : m$ (2). Тогда из чертежа и равенств (2) следует: $\overrightarrow{ON} = \frac{m}{n}\overrightarrow{AO}$. Аналогично из параллельности отрезков AM и BC следует $|BO| : |OM| = |CO| : |AO| = q : p$ и $\overrightarrow{OM} = \frac{p}{q}\overrightarrow{BO}$. Тогда можно выразить вектор $\overrightarrow{MN}$ через $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$ последовательными заменами: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -\frac{p}{q}\overrightarrow{BO} + \frac{m}{n}\overrightarrow{AO} = \frac{1}{nq}(-np\overrightarrow{BO} + mq\overrightarrow{AO})$.

Откуда $\overrightarrow{DC} = \frac{nq}{mp}\overrightarrow{MN}$, что и означает, в переводе на геометрический язык, параллельность отрезков MN и DC.

Ко второму виду относятся задачи, в которых доказывается, что некоторая точка делит отрезок в некотором отношении или, в частности, является его серединой.

Для доказательства того, что точка C делит отрезок AB в некотором отношении $|AC| : |CB| = m : n$, достаточно:

а) доказать равенство $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$;

б) доказать равенство

$$\overrightarrow{QC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{QA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{QB},$$

где Q — произвольная точка. Доказательство достаточности последнего пункта (б) несложно:

$$\overrightarrow{QC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{QA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{QB} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\overrightarrow{QC} = \frac{1}{m}\overrightarrow{QA} +$$
$$+\frac{1}{n}\overrightarrow{QB} \Leftrightarrow \frac{1}{m}(\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QA}) = \frac{1}{n}(\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC}) \Leftrightarrow \frac{1}{m}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{n}\overrightarrow{CB},$$

что и означает, что $|AC| : |CB| = \frac{m}{n}$.

Заметьте, что, проведя доказательство в обратном порядке, можно убедиться в необходимости условия (б) для деления точкой C отрезка AB в отношении $m : n$.

Решим несколько задач этого вида.

Задача 3. В произвольном четырехугольнике отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку пересечения средних линий. Доказать, что этот отрезок делится ею пополам.

Р е ш е н и е. Тот факт, что точка O (рис. 31) является серединой отрезка EF, можно доказать различными способами. Наиболее естественными из них являются:

1) доказать, что $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{QF}$, это означает, что $EPFQ$ — параллелограмм, и так как $[EF]$ является его диагональю, то она проходит через точку O и делится ею пополам;

2) доказать, что $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OF}$;

3) доказать, что $\overrightarrow{QO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{QF})$ или $\overrightarrow{NO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF})$;

4) доказать, что $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF})$ или $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF})$.

Рассмотрим первый способ доказательства, который в данном случае является и самым простым.

В треугольнике ABC отрезок EP является средней линией, откуда $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. В треугольнике ABD отрезок QF является средней линией, откуда $\overrightarrow{QF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Это значит, что $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{QF}$, и задача решена.

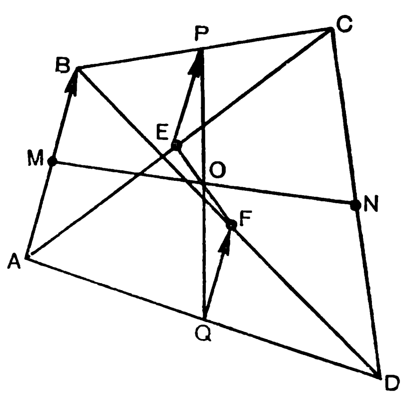


Рис. 31

Задача 4. В параллелограмме $ABCD$ сторона AD разделена на n равных частей и первая точка де-

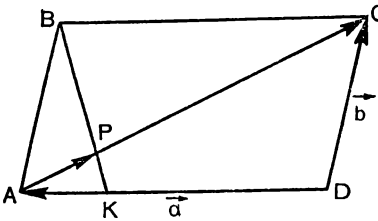


Рис. 32

ления соединена с вершиной B. На какие части делит полученная прямая диагональ AC?

Решение. Пусть $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AP} = \alpha\,\overrightarrow{AC}$ (рис. 32).

Выразим вектор $\overrightarrow{AP}$ двояким образом через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha(\vec{b} - \vec{a}) = \alpha\vec{b} - \alpha\vec{a}$;

2) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KP} = -\frac{1}{n}\vec{a} + \alpha\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{n}\vec{a} + \alpha\left(\frac{1}{n}\vec{a} + \vec{b}\right) =$

$= \frac{\alpha - 1}{n}\vec{a} + \alpha\vec{b}$ $\quad(\overrightarrow{KP} = \alpha\overrightarrow{KB}$, так как $\triangle APK \sim \triangle BPC)$.

Тогда по теореме о единственности представления вектора через два неколлинеарных вектора имеем: $\frac{\alpha - 1}{n} = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{n+1}$. Это значит, что отрезок AP составляет $(n + 1)$ часть отрезка AC. Задача решена.

При решении задач второго вида иногда выбирается произвольная точка Q плоскости в качестве полюса. При решении задач второго вида (и вообще при решении задач векторным способом) находит широкое применение следующая теорема.

Теорема. *Пусть A_1, A_2, A_3 — неколлинеарные точки, M — четвертая данная точка, а Q — произвольная точка плоскости. Если*

$$\overrightarrow{QM} = \alpha_1\overrightarrow{QA_1} + \beta_1\overrightarrow{QA_2} + \gamma_1\overrightarrow{QA_3},$$
$$\overrightarrow{QM} = \alpha_2\overrightarrow{QA_1} + \beta_2\overrightarrow{QA_2} + \gamma_2\overrightarrow{QA_3},$$

то $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Доказательство. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{QM} &= \alpha_1\overrightarrow{QA_1} + \beta_1\overrightarrow{QA_2} + \gamma_1\overrightarrow{QA_3}\\ \overrightarrow{QM} &= \alpha_2\overrightarrow{QA_1} + \beta_2\overrightarrow{QA_2} + \gamma_2\overrightarrow{QA_3}\end{aligned}\right\} \alpha_1\overrightarrow{QA_1} + \beta_1\overrightarrow{QA_2} + \gamma_1\overrightarrow{QA_3} =$$

$= \alpha_2\overrightarrow{QA_1} + \beta_2\overrightarrow{QA_2} + \gamma_2\overrightarrow{QA_3} \Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)\overrightarrow{QA_1} + (\beta_1 - \beta_2)\overrightarrow{QA_2} +$
$+ (\gamma_1 - \gamma_2)\overrightarrow{QA_3} = \vec{0}$. Но $\overrightarrow{QA_2} = \overrightarrow{QA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{QA_3} = \overrightarrow{QA_1} +$
$+ \overrightarrow{A_1A_3}$. Тогда $(\alpha_1 - \alpha_2)\overrightarrow{QA_1} + (\beta_1 - \beta_2)\overrightarrow{QA_1} + (\beta_1 - \beta_2)\overrightarrow{A_1A_2} +$
$+ (\gamma_1 - \gamma_2)\overrightarrow{QA_1} + (\gamma_1 - \gamma_2)\overrightarrow{A_1A_3} = \vec{0} \Leftrightarrow [(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) +$
$+ (\gamma_1 - \gamma_2)]\overrightarrow{QA_1} = (\beta_1 - \beta_2)\overrightarrow{A_2A_1} + (\gamma_1 - \gamma_2)\overrightarrow{A_3A_1}$.

Так как точкой Q может быть любая точка плоскости, то в левой части последнего равенства вектор $\overrightarrow{QA_1}$ переменный, а в правой —

векторы $\overrightarrow{A_2A_1}$, $\overrightarrow{A_3A_1}$ постоянны и неколлинеарны. Значит, это равенство возможно только при равенстве нулю коэффициентов при этих векторах:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) + (\gamma_1 - \gamma_2) = 0,$$
$$\beta_1 - \beta_2 = 0,$$
$$\gamma_1 - \gamma_2 = 0.$$

Откуда и вытекает, что $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Рассмотрим теперь решение задачи из второй группы с использованием этой теоремы.

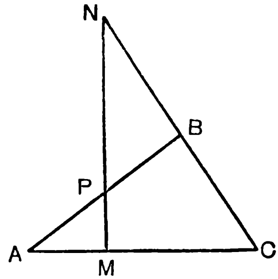


Рис. 33

Задача 5. На стороне AC треугольника ABC взята такая точка M, что $|AM| = \frac{1}{3}|AC|$, а на продолжении стороны BC — такая точка N, что $|BN| = |CB|$. В каком отношении точка P пересечения отрезков AB и MN делит каждый из этих отрезков?

Решение. Обозначим $|NP| : |PM| = \alpha : \beta$, $|AP| : |PB| = \gamma : \delta$ (1) (рис. 33). Тогда нам нужно найти $\alpha : \beta$ и $\gamma : \delta$. Для этого нужно составить несколько уравнений, содержащих α, β, γ, δ. Два таких уравнения можно написать сразу, используя теорему о делении отрезка в данном отношении.

Если Q — произвольная точка плоскости, то для отрезков AB и NM имеем:

$$\overrightarrow{QP} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{QN} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{QM} \quad (2), \qquad \overrightarrow{QP} = \frac{\delta}{\gamma+\delta}\overrightarrow{QA} + \frac{\gamma}{\gamma+\delta}\overrightarrow{QB}. \quad (3)$$

Написанные равенства содержат пять различных векторов. Уменьшим их число, заменив имеющиеся векторы другими на основе той же теоремы. Тогда для отрезков NC и AC имеем: $\overrightarrow{QB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QN} + \overrightarrow{QC})$, $\overrightarrow{QM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{QC}$ (4). Подставляя из равенства (4) в равенства (2) и (3) значения QB и QM, получим:

$$\overrightarrow{QP} = \frac{\delta}{\gamma+\delta}\overrightarrow{QA} + \frac{\gamma}{2(\gamma+\delta)}\overrightarrow{QN} + \frac{\gamma}{2(\gamma+\delta)}\overrightarrow{QC}, \quad (5)$$

$$\overrightarrow{QP} = \frac{2\alpha}{3(\alpha+\beta)}\overrightarrow{QA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{QN} + \frac{\alpha}{3(\alpha+\beta)}\overrightarrow{QC}. \quad (6)$$

Откуда на основе доказанной выше теоремы имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{2(\gamma+\delta)} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}, \\ \dfrac{\delta}{\gamma+\delta} = \dfrac{2\alpha}{3(\alpha+\beta)}, \\ \dfrac{\gamma}{2(\gamma+\delta)} = \dfrac{\alpha}{3(\alpha+\beta)}. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим: $\gamma = \delta$ и $\beta = \frac{1}{3}\alpha$. Это говорит о том, что $|AP| = |BP|$ и $|NP| : |PM| = 3 : 1$. Задача решена.

К задачам третьего вида отнесем те, в которых требуется доказать принадлежность трех точек одной прямой. Эти задачи

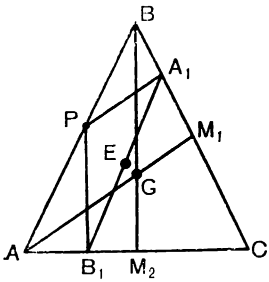


Рис. 34

можно было бы рассматривать как частные случаи задач предыдущего вида. Но они имеют некоторую специфику решения в связи с использованием условия коллинеарности трех точек. Представителем задач этой группы является следующая.

Задача 6. На стороне AB треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые параллельно его медианам AM_1 и BM_2 и пересекающие соответствующие стороны треугольника в точках A_1 и B_1. Доказать, что середина отрезка A_1B_1 (точка E), а также точка P и точка G пересечения медиан данного треугольника лежат на одной прямой.

Решение. Изменим заключение задачи таким образом, чтобы можно было применить векторы к ее решению. Это можно сделать следующими способами (рис. 34).

1) Установить, что $\overrightarrow{EP} = k\overrightarrow{GP}$ (можно взять и другие векторы).

2) Для некоторой точки Q установить, что $\overrightarrow{QE} = k\overrightarrow{QP} + (1 - k)\overrightarrow{QG}$ (условие принадлежности трех точек одной прямой).

Первый путь решения нам знаком из решения задач первого вида.

Рассмотрим второй путь. Но для этого вначале выведем условие принадлежности трех точек одной прямой.

Для того чтобы точки A, B, C принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы для полюса Q выполнялось равенство

$$\overrightarrow{QC} = p\overrightarrow{QA} + q\overrightarrow{QB}, \text{ где } p + q = 1.$$

Доказательство. Пусть точки A, B, C принадлежат одной прямой. Тогда можно написать: $|AC| : |CB| = m : n$. Это означает справедливость следующей цепочки равенств:

$$|AC| : |CB| = m : n \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{QA} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{QB} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{\overrightarrow{QC} = p\overrightarrow{QA} + q\overrightarrow{QB}.\ p + q = 1\}$$

Рассуждения, проводимые по этой цепочке, доказывают и необходимое и достаточное условия.

Решение данной задачи, таким образом, сводится к тому, чтобы установить зависимость между векторами $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QE}$, $\overrightarrow{QG}$. Если точку Q выбрать произвольно, то решение задачи окажется весьма усложненным, поэтому выберем точку Q в удобном для нас месте. Лучше всего принять ее совпадающей с точкой C. При этом векторы $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CG}$ легко выражаются через $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$. Действительно, пусть $|AP| : |PB| = m : n$ (1). Тогда $|AB_1| : |B_1C| = m : (m + n + n) = m : (2n + m)$ (2) (так как M_2 — середина $[AC]$) и

$|BA_1| : |A_1C| = n : (m + m + n) = n : (2m + n)$ (3) (так как M_1 — середина $[BC]$). Из свойства центра тяжести G вытекает: $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ (4). Из отношений (2) и (3) можно написать: $\overrightarrow{CB_1} = \frac{2n+m}{2(m+n)} \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CA_1} = \frac{2m+n}{2(m+n)} \overrightarrow{CB}$.

Тогда из свойства середины E отрезка A_1B_1 можно написать:

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{CA_1}) = \frac{1}{4} \left(\frac{2n+m}{m+n} \overrightarrow{CA} + \frac{n+2m}{m+n} \overrightarrow{CB} \right). \quad (5)$$

По теореме о делении отрезка в данном отношении имеем: $\overrightarrow{CP} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{CA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{CB}$ (6). Чтобы связать векторы $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CP}$, преобразуем вектор $\overrightarrow{CE}$: $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4} \left(\frac{m+n+n}{m+n} \overrightarrow{CA} + \frac{m+n+m}{m+n} \overrightarrow{CB} \right) = \frac{1}{4} \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{n}{m+n} \overrightarrow{CA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{CB} \right) = \frac{1}{4} (3\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CP}) = \frac{3}{4} \overrightarrow{CG} + \frac{1}{4} \overrightarrow{CP}$, т. е. $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CG} + \frac{1}{4} \overrightarrow{CP}$; а так как $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, то точки E, G, P принадлежат одной прямой и $|EG| : |PE| = 1 : 3$. Задача решена.

Рассмотренные нами виды аффинных задач на плоскости далеко не исчерпывают всего многообразия этих задач. Но они образуют самые многочисленные группы задач, что и оправдывает их специальное рассмотрение.

2. Метрические задачи. При решении метрических задач используется скалярное произведение векторов. Мы не будем классифицировать эти задачи по видам, а приведем несколько примеров таких задач.

Задача 7. На основании AB равнобедренного треугольника ABC дана точка P. Доказать, что $|PC|^2 = |AC|^2 - |AP| \cdot |BP|$. Выяснить, как изменится формула, если точка P расположена на продолжении основания AB.

Р е ш е н и е. Запишем требуемое равенство в векторной форме. Учитывая сонаправленность векторов $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{PB}$ (рис. 35), получим: $\overrightarrow{PC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB}$ (1). Доказательство равенства (1) и есть решение задачи. Преобразуем правую часть (1): $\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CP}^2 - \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PC}) - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CP}^2 = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{PC}) - \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}) + \overrightarrow{CP}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}) \times \times (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CP}^2 = \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CP}^2$.

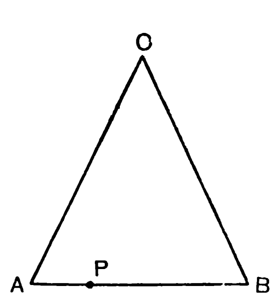


Рис. 35

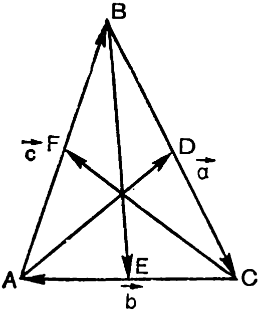


Рис. 36

Если теперь вектор $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB'}$, но $\triangle AB'B$ — прямоугольный. Таким образом, $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0$. Следовательно, $\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CP}^2$, откуда и вытекает справедливость доказываемого равенства. Исследуем изменение этого равенства в зависимости от расположения точки P на прямой AB. Если точка P принадлежит отрезку AB, то при переходе от векторного равенства (1) к скалярному равенству имеем: $\overrightarrow{PC}^2 = |\overrightarrow{PC}|^2 = |PC|^2$, $\overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 = |AC|^2$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{PB}| \cos (\widehat{\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}}) = |AP| \cdot |PB| \cdot \cos 0^\circ = |AP| \cdot |PB|$, т. е. $|PC|^2 = |AC|^2 - |AP| \cdot |PB|$.

Если же точка P не принадлежит отрезку AB, то векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{PB}$ противонаправлены и $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = |AP| \cdot |PB| \cos 180^\circ = -|AP| \cdot |PB|$. Тогда доказываемое равенство имеет вид $|PC|^2 = |AC|^2 + |AP| \cdot |PB|$. Задача решена полностью.

Задача 8. Найти сумму квадратов медиан треугольника, если известны его стороны a, b и c.

Решение. Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 36).

1. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

2. По определению суммы векторов:

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}, \quad \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}, \quad \overrightarrow{CF} = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}.$$

3. Используя свойство скалярного квадрата, получим:

$$\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BE}^2 + \overrightarrow{CF}^2 = \left(\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}\right)^2 + \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right)^2 + \left(\vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}\right)^2 =$$

$$= \vec{c}^2 + \vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{\vec{a}^2}{4} + \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{\vec{b}^2}{4} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{\vec{c}^2}{4} =$$

$$= \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + [\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}] \qquad (1)$$

4. Так как по правилу сложения векторов: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, то $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 0$. Таким образом,

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2[\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c}] = 0,$$

т. е. $a^2 + b^2 + c^2 = -2[\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}]$.

Итак, $\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

Подставив полученное значение в равенство (1), получим:

$$|AD|^2 + |BE|^2 + |CF|^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

так как согласно свойству скалярного квадрата

$$\overrightarrow{AD}^2 = |AD|^2,\ \overrightarrow{BE}^2 = |BE|^2,\ \overrightarrow{CF}^2 = |CF|^2.$$

Задача 9. Доказать, что высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство.

1. Пусть $[AP] \perp [BC]$, $[BQ] \perp [CA]$, где $[AP]$ и $[BQ]$ — высоты $\triangle ABC$ и O — точка их пересечения (рис. 37).

2. Обозначим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и L — точка пересечения (OC) и (AB).

3. По определению разности векторов: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$.

4. Так как $[PA] \perp [BC]$, то $\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

5. Аналогично, так как $[OB] \perp [CA]$, то $\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$, т. е. $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

6. Из этих равенств по транзитивности:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \text{ [так как } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}\text{], т. е. } \vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0.$$

Последнее означает: $[OC] \perp [AB]$.

7. Итак, $[CL]$ — высота $\triangle ABC$.

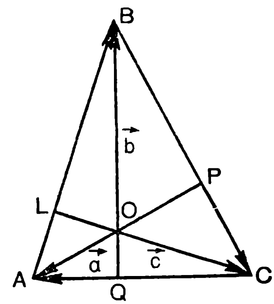


Рис. 37

Задача 10. Для того чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов противоположных сторон четырехугольника были равны. Доказать.

Необходимость. Имеем перпендикулярность диагоналей AC и BD (рис. 38). Нужно доказать равенство $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$. Здесь можно обойтись без векторов, используя теорему Пифагора. В самом деле, $|AB|^2 + |CD|^2 = |AO|^2 + |OB|^2 + |CO|^2 + |OD|^2 = (|AO|^2 + |OD|^2) + (|OB|^2 + |OC|^2) = |AD|^2 + |BC|^2$. Необходимость доказана.

Достаточность. Имеем равенство

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2.$$

Нужно доказать перпендикулярность диагоналей AC и BD. На языке векторов это означает доказательство одного из равенств: а) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$; б) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$; в) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{DO} = 0$; г) $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$;

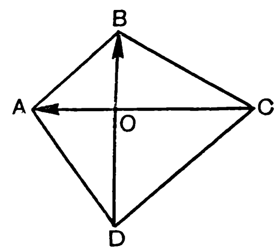


Рис. 38

д) $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{DO}=0$; е) $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{DB}=0$; ж) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$; з) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=$ $=0$; и) $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{CA}=0$.

Теперь нужно составить такое равенство, в котором содержались бы величины $|AB|^2$, $|CD|^2$, $|BC|^2$, $|AD|^2$ и члены одного из равенств, которые нужно доказать.

Для этого прежде всего преобразуем исходное скалярное равенство в векторное $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{DA}^2$ (при записи векторов, получаемых из скаляров, лучше всего соблюдать определенный порядок букв по определенному выбранному направлению обхода). Здесь мы замечаем, что можно дополнить суммы до полного квадрата и рассмотреть первые степени полученных сумм, т. е. приходим к необходимости сравнения выражений $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$. Но они в сумме дают нулевой вектор в силу замкнутости четырехугольника $ABCD$.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})^2=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD})^2\Leftrightarrow|AB|^2+|CD|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=|BC|^2+|AD|^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD})=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})\Leftrightarrow\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow(\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CO})=$$

$$=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AO}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{CO}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}=0,$$

что и означает перпендикулярность диагоналей.

3. Разные задачи. З а д а ч а **11.** Вычислить угол между векторами $\vec{a}=(2,\ -3,\ 1)$ и $\vec{b}=(5,\ 2,\ -4)$.

Р е ш е н и е. Известно, что косинус угла между векторами определяется по формуле $\cos\widehat{(\vec{a},\ \vec{b})}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Поэтому $\cos\widehat{(\vec{a},\ \vec{b})}=$

$$=\frac{2\cdot5+(-3)\cdot2+1(-4)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{5^2+2^2+(-4)^2}}=0,$$

следовательно, $\widehat{(\vec{a},\ \vec{b})}=\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 12. Даны два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, причем $A(-1;\ 2;\ 4)$, $B(-4;\ 5;\ 4)$, $C(-1;\ -2;\ 2)$ и $D(2;\ 1;\ 5)$.

Определить, перпендикулярны они друг другу или нет.

Р е ш е н и е. Найдем сначала координаты векторов. $\overrightarrow{AB}=$ $=(-3;\ 3;\ 0)$ и $\overrightarrow{CD}=(3;\ 3;\ 3)$.

Вычислим теперь скалярное произведение этих векторов: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-3) \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 0$.

Последнее и означает, что $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

Задача 13. Даны три точки: $A(2, 1, -1)$, $B(3, 2, -1)$, $C(3, 1, 0)$.

Найти величину угла $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

Решение. Найдем сначала координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (1, 0, 1)$.

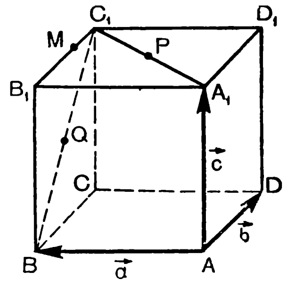


Рис. 39

Воспользовавшись формулой для косинуса угла между двумя векторами $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$, получим

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2},$$

т. е. $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 14*. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В каком отношении плоскость, проведенная через вершину A и центры P и Q граней $A_1B_1C_1D_1$ и BB_1C_1C, делит ребро B_1C_1?

Решение. Пусть M — точка пересечения рассматриваемой плоскости с ребром B_1C_1 (рис. 39).

Положим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Так как векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$ компланарны, а последние два вектора не коллинеарны, то

$$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AP} + n\overrightarrow{AQ} = m\left(\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}\right) + n\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}\right) =$$
$$= m\left(\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}\right) + n\left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{m}{2} + n\right)\vec{a} + \frac{m+n}{2}\vec{b} + \left(m + \frac{n}{2}\right)\vec{c}.$$

С другой стороны, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1M} = \vec{a} + \vec{c} + \lambda\vec{b}$, где λ — неизвестный скаляр, который нам и надо найти. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны, то полученные два разложения вектора $\overrightarrow{AM}$ совпадают и $\frac{m}{2} + n = 1$, $m + \frac{n}{2} = 1$, $\lambda = \frac{m+n}{2}$.

Из этой системы получаем $\lambda = \dfrac{2}{3}$, т. е. $|B_1M| : |MC_1| = 2 : 1$.

---

* Давыдов У. С. О геометрических задачах, решаемых с помощью векторной алгебры. М., 1968.

Задача 15. На ребрах DA, DB, AC тетраэдра $DABC$ взяты соответственно точки L, N, F, так, что $|DL| = \frac{1}{2}|DA|$, $|DN| = \frac{1}{3}|DB|$, $|AF| = \frac{1}{4}|AC|$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки L, N, F, делит ребро BC?

Решение. Пусть M — точка пересечения рассматриваемой плоскости с ребром BC (рис. 40) и $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$.

Так как точки M, N, L, F лежат в одной плоскости, причем последние три точки не лежат на одной прямой, то

$$\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DL} + l\overrightarrow{DN} + (1 - k - l)\overrightarrow{DF} =$$

$$= k\frac{\vec{a}}{2} + l\frac{\vec{b}}{3} + (1 - k - l)\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}\right).$$

С другой стороны, $\overrightarrow{DM} = (1 - m)\vec{b} + m\vec{c}$, где m — отношение $|BM| : |BC|$. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны, то мы получим систему:

$$\frac{k}{2} + (1 - k - l)\,\frac{3}{4} = 0,\ \frac{l}{3} = 1 - m,$$

$$(1 - k - l)\frac{1}{4} = m.$$

Отсюда $m = \frac{2}{5}$ и $|BM| : |MC| = 2 : 3$.

Задача 16. Если противоположные ребра AB и CD, AD и BC треугольной пирамиды (тетраэдра) $ABCD$ перпендикулярны между собой, то этим свойством обладает и третья пара противоположных ребер AC и BD (рис. 41).

Решение. Пусть Q — произвольная точка. По условию имеем: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ или $(\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA})\cdot(\overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QC}) = 0$, т. е. $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QC} = 0$ (1) и $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ или $(\overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QA})\cdot(\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QB}) = 0$, т. е. $\overrightarrow{QD} \cdot \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD} \cdot \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 0$. (2) Сложив (1) и (2), получаем $\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QD} = 0$ или $(\overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QA}) \cdot (\overrightarrow{QD} -$

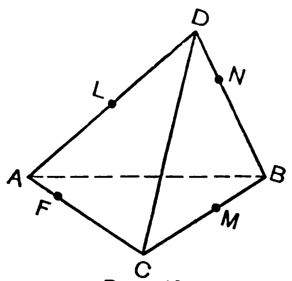


Рис. 40

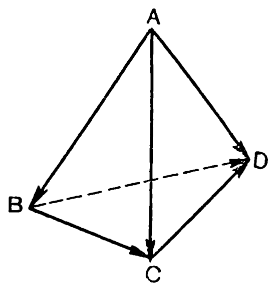


Рис. 41

$-\overrightarrow{QB}) = 0$, или, наконец, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, а это и означает требуемое.

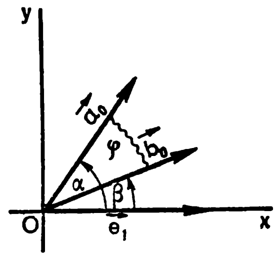


Рис. 42

Задача 17. Пользуясь понятием скалярного произведения, вывести формулу для косинуса разности двух углов.

Решение. В плоскости xOy возьмем два единичных вектора $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$ (рис. 42). Обозначим через α и β числовые значения углов, образуемых вектором $\vec{e}_1$ с векторами $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$. Тогда $\varphi = (\widehat{\vec{a}_0, \vec{b}_0}) = \alpha - \beta$. Векторы $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$ имеют координаты

$$\vec{a}_0 = (\cos\alpha, \ \sin\alpha) \quad \text{и} \quad \vec{b}_0 = (\cos\beta, \ \sin\beta).$$

Скалярное произведение данных векторов равно:

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 = 1 \cdot 1 \cdot \cos\varphi = \cos(\alpha - \beta),$$

с другой стороны, скалярное произведение этих векторов будет равно: $\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Следовательно, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

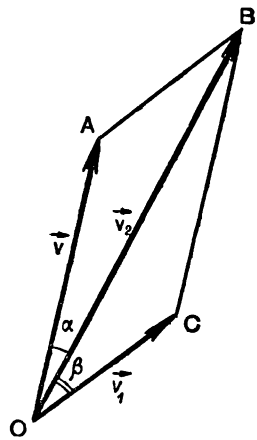


Рис. 43

Задача 18. Велосипедист едет со скоростью 15 *км/ч* в северном направлении, и ему кажется, что ветер (который дует со скоростью 9 *км/ч* откуда-то с северо-востока) направлен почти навстречу ему, под углом $\alpha = 15°$ к линии его движения. Требуется определить истинное направление ветра.

Решение (рис. 43). Велосипедиста обдувают два потока воздуха: встречный, движущийся со скоростью его собственного движения $\vec{v}$ (числовое значение скорости $v = 15$), и косой — со скоростью $\vec{v}_1$ (числовое значение скорости $v_1 = 9$). При движении велосипедист ощущает суммарный результат действия этих двух потоков, т. е. $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}$. Ему кажется, что ветер дует под углом $\alpha = 15°$, поэтому угол между векторами $\vec{v}_2$ и $\vec{v}$ составляет $\alpha = 15°$. Истинное же направление ветра (к направлению велосипедиста) составляет угол $\varphi = \alpha + \beta$.

Из $\triangle\, OAB$, используя теорему синусов, найдем угол β:

$$\frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{v}{\sin\beta}, \text{ откуда } \sin\beta = \frac{v}{v_1}\sin\alpha = \frac{9}{15}\sin 15° = 0{,}431.$$

Следовательно, $\beta = 25°30'$. Итак, $\varphi = \alpha + \beta = 40°30'$.

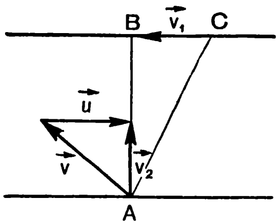


Рис. 44

Задача 19. Человек, стоящий на берегу реки шириной $d=1$ *км*, хочет переправиться на другой берег, в прямо противоположную точку: Он может сделать это двумя способами: 1) плыть все время под углом к течению, так что результирующая скорость будет все время перпендикулярна берегу; 2) плыть прямо к противоположному берегу, а расстояние, на которое его снесет течением, пройти затем по берегу пешком. Плавает он со скоростью 2,5 *км/ч*, а идет со скоростью 4 *км/ч*. Скорость течения 2 *км/ч*. Какой способ позволит переправиться скорее?

Решение (рис. 44). Введем обозначения: $\vec{v}$ — скорость плывущего человека (ее числовое значение $v = 2{,}5$ *км/ч*), $\vec{u}$ — скорость реки (ее числовое значение $u = 2$ *км/ч*), $\vec{v}_1$ — скорость ходьбы человека (ее числовое значение $v_1 = 4$ *км/ч*), результирующая скорость — $\vec{v}_2$ (ее числовое значение v_2). Легко видеть, что результирующая скорость равна $\vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{u}$, а ее числовое значение — $v_2 = \sqrt{v^2 - u^2} = 1{,}5$ *км/ч*. Следовательно, чтобы попасть из точки A на противоположный берег в точку B, плывя под некоторым углом к течению, человеку потребуется время $t_1 = \dfrac{d}{\sqrt{v^2-u^2}} = \dfrac{1}{1{,}5}$ *ч* $= 40$ *мин*; если же он будет плыть перпендикулярно течению, то на противоположный берег он попадет за время $t_2' = \dfrac{d}{v} = \dfrac{1}{2{,}5}$ *ч* $= 24$ *мин*, но течением его снесет в точку C, которая находится ниже точки B на расстоянии $|BC| = u \cdot t_2' = \dfrac{2}{2{,}5} = 0{,}8$.

Пешком это расстояние человек пройдет за время

$$t''_2 = \frac{|BC|}{v_1} = \frac{0{,}8}{4}\ ч = \frac{0{,}8 \cdot 60}{4} = 12\ мин.$$

Следовательно, время движения человека при переправе реки вторым способом равно $t_2 = t_2' + t_2'' = 24 + 12 = 36$ *мин*.

Таким образом, двигаясь вторым способом, человек попадет в точку B на 4 *мин* раньше.

Выскажем в заключение некоторые методические рекомендации, связанные с применением векторного метода при решении задач.

Рассмотренные выше примеры задач показывают, что векторный метод является весьма мощным средством решения не только геометрических задач, но и многих физических (и технических).

По значимости его можно уподобить методу составления уравнения.

Так как этот метод является новым для учащихся, необходимо:

а) заинтересовать учащихся, показав им эффективность его использования на специально подобранных задачах;

б) обучить учащихся некоторым эвристикам (системе определенных правил, помогающих найти ключ к решению задачи), которые помогут создать у них навык в его применении;

в) обучать этому методу на достаточно простых по геометрическому содержанию задачах, чтобы не отвлекать внимание школьников на трудности чисто геометрического содержания; в частности, полезно широко использовать векторный метод для решения планиметрических задач (что и предусмотрено действующим учебным пособием для IX класса).

Следует иметь в виду (и впоследствии указать на это учащимся), что векторный метод не является универсальным, к решению некоторых задач он может быть неприменим или малоэффективен.

Подводя итог рассмотренным здесь примерам применения векторного метода к решению геометрических задач, можно выделить следующие эвристики:

Что требуется доказать (на геометрическом языке)	Что достаточно доказать (на векторном языке)
$a \parallel b$.	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, где $[AB] \subset a$, $[CD] \subset b$, k — число; в зависимости от выбора $[AB]$ и $[CD]$ возникают различные векторные соотношения, среди которых выбираются подходящие.
$A \in a$ $B \in a$ $C \in a$ (три точки принадлежат одной прямой).	а) установить справедливость одного из следующих равенств: $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, или б) доказать равенство: $\overrightarrow{QC} = p \cdot \overrightarrow{QA} + q \cdot \overrightarrow{QB}$, где $p + q = 1$ и Q — произвольная точка, или в) доказать равенство $\alpha \cdot \overrightarrow{QA} + \beta \cdot \overrightarrow{QB} + \gamma \cdot \overrightarrow{QC} = \vec{0}$, где $\alpha + \beta + \gamma = 0$, Q — произвольная точка.
$C \in [AB]$, $\|AB\| : \|CB\| = m : n$ (деление отрезка в данном отношении).	$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n} \overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{QC} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{QA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{QB}$ для некоторой точки Q.

Что требуется доказать (на геометрическом языке)	Что достаточно доказать (на векторном языке)
$a \perp b$.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, где $A \in a$, $B \in a$, $C \in b$, $D \in b$.
Вычислить длину отрезка.	а) выбрать два неколлинеарных базисных вектора (или три некомпланарных), у которых известны длины и величина угла между ними; б) разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; в) найти скалярный квадрат этого вектора, используя формулу $\vec{a}^2 = a^2$.
Вычислить величину угла.	а) выбрать два неколлинеарных (три — некомпланарных) базисных вектора, для которых известно отношение длин и углы между ними; б) выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; в) вычислить $\cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$.

Конкретные применения первых трех эвристик читатель может пронаблюдать, вернувшись к рассмотрению приведенных выше аффинных задач; последних трех эвристик — к рассмотрению метрических или стереометрических задач.

При решении многих задач векторным методом использование чертежа по существу часто бывает излишним. Такова, например, задача № 208(1) из учебника геометрии для IX класса. Для ее решения достаточно воспользоваться формулой пересечения медиан: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а O — произвольная точка пространства. Имеем:

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}),$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}),$$

тогда

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) + \\ + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_1}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OC_1}) = \\ = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}).$$

Однако из методических соображений следует использовать чертежи возможно чаще.

Для поиска верных векторных соотношений, посредством которых можно решить задачу, часто оказывается полезным на чертеже: а) выделить замкнутую ломаную (многоугольник), выразив при этом один вектор через сумму нескольких векторов (для треугольника удобнее — через разность двух векторов); б) выявить параллельные прямые; в) выявить перпендикулярные прямые; г) установить наличие конгруэнтных отрезков (для чего достаточно отыскать перемещение, переводящее один отрезок в другой); д) установить наличие отрезков, длины которых находятся в известном отношении (для чего достаточно отыскать композицию перемещения и гомотетии, переводящую один отрезок в другой).

В каждом из указанных выше случаев использовать соответствующую эвристику для перевода ситуации задачи с геометрического языка на векторный.

В заключение отметим, что в курсе геометрии IX—X классов векторный метод не применяется к решению сложных задач.

Программой предусматривается выработка у школьников умений использовать при решении задач и доказательстве теорем: а) разложение вектора по трем некомпланарным (по двум неколлинеарным) векторам; б) нахождение длины отрезка; в) вычисление величины угла; г) установление перпендикулярности или параллельности прямых.

О ПОСТРОЕНИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

В объяснительной записке к утвержденным Министерством просвещения СССР программам по математике для средней школы подчеркнута возможность различных вариантов построения курса стереометрии в IX—X классах. Приведем этот текст полностью (см. «Математика в школе», 1968, №2, с. 16).

«Программа не предрешает, будет ли изложение начал стереометрии начинаться с перечисления пространственных аксиом соединения, или же, опираясь на наглядные соображения, будут сформулированы свойства операций над векторами, которые и лягут в основу дальнейшего дедуктивного построения курса в качестве аксиом.

На первом пути кажется неизбежным по-прежнему опираться при изложении стереометрии на всю совокупность ранее установленных фактов планиметрии, не смущаясь тем, что курс планиметрии восьмилетней школы либо совсем лишен аксиоматической базы, либо может быть построен на основе избыточной трудно обозримой системы аксиом.

Второй путь позволяет предложить вниманию учащихся обозримую полную аксиоматику геометрии. Но для нашей школы он является совсем новым».

Возможны три пути построения курса стереометрии. Построение курса геометрии с самого начала может базироваться на понятии вектора. Возможно также изложение, в котором понятие вектора появляется примерно в середине курса (перед разделами, связанными с перпендикулярностью в пространстве). Наконец, возможно и такое построение курса, при котором основной теоретический материал излагается традиционными методами, а векторы появляются лишь в конце курса как мощное средство решения задач.

Первый вариант предполагает наличие у учащихся, пришедших из восьмилетней школы, четких пространственных представлений. Предполагается, что они знают (чисто наглядно, без какого бы то ни было строгого обоснования), что такое параллельные прямые и плоскости, и т. д. В противном случае может возникнуть опасность отрыва (в сознании учащихся) абстрактного векторного построения стереометрии от реальных (зрительных и осязательных) представлений. Весьма существенно здесь также предварительное знакомство учащихся с понятием вектора и со свойствами векторов, так как в противном случае аксиомы геометрии окажутся трудными в силу своей непривычности. Несмотря на кажущуюся трудность такого пути (в основном из-за новизны), есть основания полагать, что в будущем он станет основным — в первую очередь в силу его близости современным воззрениям.

Напротив, третий путь построения стереометрии не обеспечивает навык учащихся в пользовании векторным аппаратом при решении задач.

Второй компромиссный путь является более приемлемым. Векторы появляются достаточно рано, причем они используются не только при решении задач, но и как средство доказательства теорем о перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве.

Путь построения геометрии, идущий от Евклида и закрепленный Д. Гильбертом в его аксиоматике геометрии (1899), заключается в следующем. Основными, неопределяемыми понятиями геометрии служат понятия точки, прямой, плоскости. Основными, неопределяемыми отношениями между ними являются: отношения принадлежности (например, точка лежит на прямой, плоскость проходит через прямую и т. д.); понятие «между», отношение, связывающее тройки точек одной прямой и позволяющее определить отрезок, луч, угол и т. д.; отношение конгруэнтности, связывающее два отрезка или два угла. Формулируются 18 аксиом, связывающих между собой основные понятия и отношения (и дающие косвенное определение этих основных понятий и отношений).

Все остальные понятия геометрии уже точно определяются; предложения геометрии строго доказываются (т. е. выводятся из аксиом в соответствии с правилами логики).

Заметим, что такой путь построения геометрии в современной трактовке реализован в действующих учебниках геометрии.

Путь построения евклидовой геометрии по Гильберту является самым известным, но отнюдь не единственно возможным. В частности, можно осуществлять построение геометрии, исходя из других первоначальных (неопределяемых) понятий и отношений, разумеется, пользуясь в этом случае другой системой аксиом. Так, можно отбросить равенство (конгруэнтность) из списка первоначальных отношений, введя вместо него движение и определив конгруэнтные отрезки или углы, как такие, которые переводятся один в другой с помощью некоторого движения. Такой путь построения геометрии имеет свои преимущества. В наиболее совершенном виде он был разработан Ф. Шуром (1912 г.), аксиоматика которого по своей стройности вполне может соперничать с гильбертовской.

Совершенно иной путь построения геометрии был предложен в 1917 г. известным немецким математиком Германом Вейлем (учеником Давида Гильберта). Заметим, что советский математик П. К. Рашевский несколько упростил эту систему аксиом.

СОДЕРЖАНИЕ

Валерий Александрович Гусев,
Юрий Михайлович Колягин,
Геннадий Лаврович Луканкин

ВЕКТОРЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *С. В. Пазельский*
Художник обложки *Б. Н. Юдкин*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *В. Ф. Коскина*
Корректор *К. П. Лосева*

Сдано в набор 21/VI 1975 г. Подписано к печати 25/II 1976 г. $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 1. Печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,68. Тираж 285 т. экз. А05534. Заказ № 355.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена 9 коп.